

1 Domein WISKUNDE - versie 2.11 - ©Copyright USolv-IT

1.1 Analyse

1.1.1 Functies

De bouwstenen

1. Verzamelingen, relaties
 - Verzamelingen
 - Relaties (algemeen)
 - Orde- en equivalentierelaties
2. Getallenverzamelingen
 - De getallenverzamelingen \mathbb{N} , \mathbb{Z} en \mathbb{Q}
 - De reële getallen \mathbb{R}
 - Definitie, eigenschappen van supremum en infimum
 - Dichtheid van \mathbb{Q} in \mathbb{R}
 - De complexe getallen \mathbb{C}
3. Telprincipes en elementaire bewijzen
 - Belangrijke telprincipes
 - De elementaire telwijzen
 - Binomium van Newton
 - Partieelsommen
4. Volledige inductie

Reële functies van één veranderlijke

Functies en rijen

- Definities en kenmerken van functies
- Bewerkingen
 - Samenstelling van functies
 - Inverse van functies
- Voorbeelden
 - Veeltermen
 - Rationale functies

- De absolute waarde
- De signum functie
- Geheel deel
- Transcendente functies
 - * Exponentiële functies
 - * Hyperbolische functies
 - * Logaritmische functies
 - * Algemene machtsfuncties
 - * Goniometrische (trigonometrische) functies
 - * Cyclometrische functies
 - * Complexe e -macht
- Spline
- Rijen
 - Convergentiekenmerken
 - Bovenlimiet en onderlimiet
 - Ophopingspunt van een rij
 - Convergentiesnelheid
 - Rekenregels
 - Differenties, rijen en recursieve eigenschappen
 - Partieelsommen
 - Rekenkundige rijen en toepassingen
 - Meetkundige rijen en toepassingen
 - Iteratieprocessen en toepassingen
- Numerieke evaluatie van functies

Continuïteit en limieten

- Rijdefinitie en ϵ - δ -definitie
- Eigenschappen van continue functies
- Begrip, definitie van limiet van een functie
- Eigenschappen van limieten
- Rekentechnieken voor limieten

Afgeleiden

- Begrip, definitie en meetkundige betekenis
- Eigenschappen, rekenregels
- Rechter- en linkerafgeleide
- Inverse functies en hun afgeleide
- Middelwaardestelling van Rolle en Lagrange
- Impliciet gedefinieerde functies
- Toepassingen
 - Lineaire benadering
 - Maxima en minima, stijgend en dalend
 - Convexiteit, concaviteit
 - Economische toepassingen
 - Ingenieurstoepassingen
- Hogere orde afgeleiden
- Grafieken van functies en vergelijkingen
- De regel van de l'Hôpital
- Spline-functies

Integralen

- Begrip, definitie Riemann integraal
- Eigenschappen integraal
- Primitieve functie en onbepaalde integraal
- Eigenschappen van integreerbare functies
- Hoofdstelling integraalrekening
- Integratietechnieken
- Numerieke integratie
- Oneigenlijke integralen
 - Definitie
 - Convergentie en convergentiecriteria
 - Ingenieurstoepassingen

- Toepassingen
 - Lengte van een kromme $y = f(x)$
 - Oppervlakte van een gebied beschreven in poolcoördinaten
 - Inhoud en manteloppervlakte van een omwentelingslichaam
 - Economische toepassingen
 - Ingenieurstoepassingen
 - Oppervlakte tussen 2 krommen
 - Oppervlakte van een vlakdeel met parametervergelijking

Reeksen en machtreeksen

- Reeksen
 - Definitie van een reeks
 - Convergentiekenmerken van d'Alembert, Cauchy, Leibniz
 - Foutenschatting
- Rijen en reeksen van functies
 - Puntsgewijze convergentie
 - Gelijkmatige convergentie
- Machtreeksen
 - Convergentiestraal
 - Machtreeksontwikkeling van een functie
 - * Maclaurinreeks
 - * Taylorformule en Taylorveelterm
 - * Toepassingen
- Voortbrengende functies
- Fourierreeksen

Reële functies van meerdere veranderlijken

1. Inleidende begrippen

- Vectorruimte \mathbb{R}^n
 - Cartesiaanse coördinaten, poolcoördinaten, sferische coördinaten, cilindercoördinaten
 - Norm, metriek bepaald door een norm
 - Vectornormen
 - Metriek

- Inproduct, vectorieel product
- Inwendig punt, ophopingspunt, geïsoleerd punt, randpunt
- Rechten en vlakken in \mathbb{R}^3
- Hoeken
- Grafiek van functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- Niveaulijnen en niveau-oppervlakken
- Tekenonderzoek en ongelijkheden

2. Continuïteit en limieten

- Topologische structuur van \mathbb{R}^n
- Continuïteit
- Limieten

3. Afgeleiden

- Partiële afgeleiden van functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- Hogere orde partiële afgeleiden
- Gradiënt
- Differentieerbaarheid
- Totale afgeleide
- Kettingregel
- Homogene functies en stelling van Euler
- Richtingsafgeleide
- Raakvlak en normaal
- Afgeleide van een impliciet gedefinieerde functie
- Differentiaaloperatoren
- Afgeleiden en machtreeksen
- Middelwaardstelling en Taylorreeks
- Optimisatie
 - Definities en probleemstelling
 - Voorwaarden voor een extremum
 - Het opzoeken van een globaal extremum
 - Het opzoeken van een stationair punt
 - * De methode van Newton
 - * De methode der steilste afdaling
 - Niet lineaire kleinste kwadratenbenadering
 - * Methode van Newton
 - * Methode van Gauss-Newton

- * Gebruik van stabielere methoden
- Optimisatie met beperkingen
 - * Beperkingen die gelijkheden zijn
 - * Beperkingen die ongelijkheden zijn
 - * Economische toepassingen
 - * Ingenieurstoepassingen

4. Integralen

- Meervoudige integraal
 - Definitie, eigenschappen, Riemann integraal
 - Herhaalde enkelvoudige integratie
 - Transformatie van integratieveranderlijken
 - * Transformatie naar poolcoördinaten
 - * Transformatie naar cilindercoördinaten
 - * Transformatie naar sferische coördinaten
- Toepassingen

Vectorwaardige functies

1. Parametervergelijkingen van krommen
2. Parametervergelijkingen van oppervlakken
3. Vectorvelden
 - Rotor
 - Divergentie
4. Limieten
5. Continuïteit
6. Afgeleiden
 - Definitie
 - Eerste orde benadering en raakvlak
 - Kettingregel
 - Niet lineaire stelsels
7. Integralen
 - Integraal over een kromme
 - Lengte en massa van een kromme
 - Lijnintegraal

- arbeid in een krachtveld; conservatief vectorveld
- flux doorheen een kromme
- Integraal over een oppervlak
 - Oppervlakte en massa van een oppervlak
- Oppervlakintegraal
 - Flux, debiet doorheen een oppervlak
- Stellingen van Green, Stokes en Gauss
- Andere toepassingen

Beginselen van complexe functies

- Definitie
- Grafische voorstellingen
- Limieten
- Continuïteit
- Differentiaalrekening
- Integraalrekening

1.1.2 Differentiaalvergelijkingen/Differentievergelijkingen

Lineaire differentiaalvergelijkingen

- Modelleren met differentiaalvergelijkingen
- Modelleren met differentievergelijkingen
- Lineaire differentievergelijkingen en recursierelaties
- Eerste orde, eerste graad vergelijkingen
 - Het richtingsvectorveld
 - Vergelijkingen oplosbaar door directe integratie
 - Scheidbare veranderlijken
 - Lineaire differentiaalvergelijking
 - Differentiaalvergelijking van Bernoulli
 - Exacte differentiaalvergelijkingen
- Lineaire differentiaalvergelijking van 2^e /hogere orde
 - Structuur van de oplossingsverzameling
 - * Lineair onafhankelijke functies

- * Een basis voor de homogene vergelijking
- * De niet-homogene vergelijking
- Vergelijking met constante coëfficiënten
 - * Homogene vergelijking
 - * Niet-homogene vergelijking
 - Methode van de onbepaalde coëfficiënten
 - Methode van de variatie van de constanten
- Vergelijking met niet constante coëfficiënten
 - * Homogene vergelijking
 - * Niet homogene vergelijking
 - Methode van de variatie van de constanten
- Laplace-transformatie
 - Definitie en bestaansvoorwaarden
 - Eigenschappen van de Laplace-transformatie
 - Inverse van Laplace-transformatie
- Het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen via de Laplace- transformatie
- Inleidende begrippen van partiële differentiaalvergelijkingen

Stelsels differentiaalvergelijkingen

- Definities en voorbeelden
- Bestaan en eenduidigheid van de oplossing
- Fundamenteel systeem
- Homogeen stelsel met constante coëfficiënten
- Niet homogeen stelsel
- Methode der matrixexponentiële

Niet lineaire differentiaalvergelijkingen

Evenwicht en stabiliteit

1.2 Algebra

1.2.1 Lineaire algebra

Vectorruimten

1. Definitie
2. Lineaire onafhankelijkheid
3. Lineaire combinaties en vectorruimte voortgebracht door
4. Basis van een vectorruimte
 - Definitie
 - Bestaan van een basis
 - Dimensie
 - Coördinaten t.o.v. een basis
5. Van lineair onafhankelijk deel of voortbrengend deel tot basis
6. Deelruimten en de dimensiestelling voor deelruimten
 - Deelruimten
 - Dimensiestelling voor deelruimten
7. Isomorfe vectorruimten
8. Projecties
 - Som, doorsnede en dimensiestelling
 - Directe som en direct product
9. Vectornormen, genormeerde vectorruimte
10. Duale vectorruimte, duale basis

Lineaire afbeeldingen en matrices

1. Definitie, voorbeelden van lineaire afbeeldingen
2. Lineaire afbeelding bepaald door een matrix
3. Matrixvoorstelling van een lineaire afbeelding t.o.v. basissen
4. Invloed van een basisverandering op de matrixvoorstelling
5. Bijzondere matrices
 - Elementaire matrices en rij- of kolomoperaties
 - Driehoeksmatrices en matrices in echelonvorm

- Matrices in Jordan normaalvorm
- Symmetrische matrices en Hermitische matrices
- Orthogonale en unitaire matrices

6. Matrixrekenen
7. Gepartitioneerde matrices
8. Equivalente matrices (i.h.b. gelijkvormige matrices)
 - (a) Bijzonder geval : reguliere matrix
 - (b) Behoud van rang
 - (c) Kanonieke vorm voor equivalentie
9. Kern en beeld van een lineaire afbeelding
10. De dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen
11. Kolom-, rij- en nulruimten
12. Projecties, projectiematrices
13. Duale afbeelding van een lineaire afbeelding

Determinanten

1. Permutaties
2. Definitie, voorbeelden, betekenis
3. Eigenschappen
4. Ontwikkelen van een determinant naar een rij of kolom, cofactoren
5. Adjunctmatrix
6. Determinanten en inverteerbare matrices
7. Determinanten en rang van een matrix
8. Volume van een parallellepipedum

Oplossen van stelsels

1. Regel van Cramer
2. Oplosbaarheidsvoorwaarde
3. Het oplossen van stelsels in rijecholon vorm
4. Het homogeen stelsel (de nulruimte)
5. Het oplossen van een willekeurig stelsel
6. Oplossen van een regulier stelsel volgens Gauss
7. Het inverteren van een matrix
8. Het oplossen van meerdere stelsels
9. De LU ontbinding van een matrix
10. Economische modellen geformuleerd in termen van stelsels
11. Kleinste kwadratenmethode (benaderde oplossingen)
12. Toepassingen en vraagstukken in termen van stelsels

Matrix- en eigenwaardenproblemen

1. Eigenwaarden en de karakteristieke veelterm, het spectrum
2. Eigenvectoren, eigenruimten
3. Stelling van Cayley Hamilton
4. Algebraïsche en geometrische multipliciteit
5. Diagonaliseerbaarheid van een lineaire transformatie/vierkante matrix
 - Enkelvoudig spectrum
 - Nilpotente matrices
 - Jordανvorm en hoofdvectoren
 - Minimaalveelterm
6. Symmetrische, reële matrices en bilineaire producten (kwadratische vormen)
7. Congruente matrices
8. Classificatie van symmetrische matrices op congruentie na
9. Stelling van Sylvester, signatuur, methode van Lagrange
10. Hermitische matrices en hermitische producten

11. Orthogonale classificatie van symmetrische matrices
12. Unitaire classificatie van Hermitische matrices
13. Singuliere-waardenontbinding
 - Singuliere-waardenontbinding (SWO)
 - Veralgemeende (Moore-Penrose-) inverse
 - Dyadische ontbinding
 - Beste rang-k-benadering van een matrix
14. Matrixnormen
15. Diagonaliseerbare matrices en toepassingen
16. Lineaire iteratieve processen en toepassingen
 - Lineaire iteratieve processen: definitie, stationaire en stabiele verdelingen
 - Waarschijnlijkheidsmatrix
 - Lesliematrix
 - Markov-ketens

1.2.2 Algebraïsche structuren

Groepen

1. Definitie en voornaamste eigenschappen
2. Deelgroepen
3. Deelgroep voortgebracht door
4. Nevenklassen
5. Orde (van deelgroepen, van elementen)
6. Normaaldeleers
7. Quotiëntgroep
8. Groepshomomorfisme, Kern, Image
9. Isomorfisme van groepen
10. Permutatiegroepen
11. Matrixgroepen
12. Abstracte groep, groepsrepresentatie
13. Symmetriegroepen
14. Groepsakties, orbieten, orbietstelling

Ringen en Velden

1. Definities (ring,veld,lichaam)
2. Deelring, ideaal
3. Quotientring
4. Veeltermringen
5. Matrixringen
6. Deelbaarheid, irreduciebele elementen
7. GGD, KGV, Euler-indicator
8. Modulo-rekenen
9. Chinese reststelling
10. Oplossen stelsels in ringen, velden
11. Priemgetallen
12. Eenheden
13. Congruenties van Fermat en Euler
14. Geheime codes

1.2.3 Algebra van vergelijkingen

Oplossen van vergelijkingen

1. Numerieke methodes voor het oplossen van vergelijkingen
 - Regel van het midden
 - Newton Raphson
 - Vastepuntsmethodes

Oplossen van ongelijkheden

1.3 Meetkunde

1.3.1 Affiene meetkunde

1. Definities en eigenschappen van affiene ruimten en affiene deelruimten
2. Parallellisme
3. Deelverhouding
4. Eerstegraadsvergelijkingen (rechten, vlakken, hypervlakken)

- Vectorvergelijking
 - Parametervergelijking
 - Cartesiaanse vergelijking
 - Omzetting van parametervergelijking naar Cartesiaanse vergelijking
 - Omzetting van Cartesiaanse vergelijking naar parametervergelijking
 - Meetkundige interpretatie van (stelsels) lineaire vergelijkingen
5. Affiene vlakken
- Onderlinge stand van deelruimten
 - Axiomatische affiene vlakken
6. Enkele klassieke stellingen
- Stelling van Ceva en Menelaos
 - Stelling van Thales
 - Stelling van Pappus
 - Stelling van Desargues
7. Affiene 3-ruimten
- Onderlinge stand van rechten
 - Onderlinge stand van vlakken
 - Onderlinge stand van rechten en vlakken
 - Onderlinge stand van punten, rechten en vlakken
8. Affiene ruimten van algemene dimensies
- Parallele en zwakparallele deelruimten
 - Onderlinge stand van deelruimten
9. Barycentrische coördinaten, barycentrum, overgang van Cartesiaanse naar barycentrische coördinaten
10. Affiene transformaties
- Definities en eigenschappen
 - Affiene invarianten
 - Oriëntatiebewarende of -omkerend
11. Kegelsneden, kwadrieken en kwadratische vormen (affiene classificatie)
12. Gedrag op oneindig en homogene coördinaten

1.3.2 Euclidische meetkunde

1. Scalair product en norm
2. Hoek en orthogonaliteit
3. Orthonormale basis
4. Orthogonale projecties
5. Orthogonale lineaire transformaties
6. Orthogonalisatieprocedé van Gram-Schmidt
7. De QR-ontbinding van een matrix
8. Kegelsneden, kwadrieken en kwadratische vormen (Euclidische classificatie)
 - Definities
 - Kwadratische functies
 - Eigenschappen van symmetrische matrices
 - Ontbinding van kwadratische functies
 - Reductie tot standaardvorm
 - Beschrijvende van een kwadriek
 - Raakruimte in een punt aan een kwadriek
9. Het Euclidisch vlak (\mathbb{R}^2)
 - Onderlinge stand van punten en rechten in \mathbb{R}^2
 - Hoeken en afstanden in \mathbb{R}^2
10. De Euclidische 3-ruimte (\mathbb{R}^3)
 - Vlakkenbundels in \mathbb{R}^3
 - Hoeken en afstanden in \mathbb{R}^3
 - De hoek tussen twee rechten
 - Het vectorproduct, n-volume, parallellepipedum
 - Normaal van een vlak
 - Hoek tussen rechte en vlak
 - De hoek tussen twee vlakken
 - De afstand van een punt tot een rechte
 - * De afstand van de oorsprong tot een rechte
 - De afstand van een punt tot een vlak
 - * De afstand van de oorsprong tot een vlak

- De afstand en gemeenschappelijke loodlijn tussen twee kruisende rechten
 - Projecties
11. De n-dimensionale Euclidische ruimte (R^n)
- Afstanden en hoeken
 - Vergelijking van een hypervlak
 - Parallele hypervlakken
 - Orthogonale hypervlakken
 - Onderlinge stand van deelruimten
 - Afstand van een punt tot een hypervlak
12. Coördinatentransformaties
- Orthogonale transformaties
 - Oriëntatie van het assenstelsel
 - Isometrieën in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3
 - Definitie
 - Rotatie (rond punt in \mathbb{R}^2 , rond rechte in R^3)
 - Spiegeling (t.o.v. rechte in \mathbb{R}^2 , t.o.v. vlak in \mathbb{R}^3)
 - Schuifspiegeling
 - Schroefbeweging
 - Draaispiegeling
13. Gedrag op oneindig en homogene coördinaten

1.3.3 Projectieve meetkunde

1.3.4 Krommen

1. Algemeen
- Beschrijving door vergelijkingen
 - Parametervergelijkingen
 - Herparametriseren
 - Meetkundige plaats
 - Snelheidsvectorveld langs een kromme
 - Versnellingsvectorveld langs een kromme
 - Booglengte
 - Congruente krommen
 - Geodeten

2. Vlakke krommen

- (Georiënteerde) kromming en Frenet apparaat
- Congruente krommen
- Totale kromming en rotatie-index

3. Ruimtekrommen

- Kromming
- Torsie
- Congruente krommen
- Cilinderschroeflijnen en cirkelschroeflijnen

1.3.5 Oppervlakken

1. Beschrijving door vergelijkingen
2. Meetkundige plaats
3. Kwadratische oppervlakken
4. Raakvlak
5. Regelloppervlakken
6. Omwentelingsoppervlakken
7. Cilinders
8. Kegels
9. Bol- en cilindercoördinaten

1.4 Logica

1.4.1 Propositielogica

1.4.2 Predikatenlogica

1. Interpreteren en vertalen
2. Rekenen met logische equivalenties
3. Logisch waar, logisch gevolg en modellen
4. Formele bewijzen

1.4.3 Booleaanse algebra

1. Normaalvormen
2. Booleaanse vergelijkingen

1.4.4 Onbeslisbaarheid en de onvolledigheidsstelling van Gödel

1.5 Kansrekenen

1.5.1 Kans

1. Het begrip kans
2. Combinatoriek en telproblemen (in kansvraagstukken)

1.5.2 Kansruimte

1.5.3 Voorwaardelijke kans

1. Definitie en eigenschappen
2. Onafhankelijkheid
3. Stelling van Bayes

1.5.4 Kansverdelingen univariaat

Discrete kansverdelingen

1. Kansdichtheid (kansfunctie)
2. Cumulatieve verdelingsfunctie
3. Verwachtingswaarde en variantie
 - Verwachtingswaarde
 - Variantie en standaardafwijking
4. Momentgenererende functie

Specifieke discrete kansverdelingen

1. Uniforme verdeling
2. Bernoulli verdeling
3. Binomiale verdeling
4. Poisson verdeling
5. Geometrische verdeling
6. Hypergeometrische verdeling
7. Negatief binomiale verdeling

Continue kansverdelingen

1. Kansdichtheid (dichtheidsfunctie)
2. Cumulatieve verdelingsfunctie
3. Verwachtingswaarde en variantie
 - Verwachtingswaarde
 - Variantie en standaardafwijking
4. Momentgenererende functie

Specifieke continue kansverdelingen

1. Uniforme verdeling
2. Normale verdeling
3. t-verdeling
4. Exponentiële verdeling
5. Gamma verdeling
6. Chi-kwadraatverdeling
7. F-verdeling
8. Logistische verdeling
9. Beta-verdeling
10. Pareto-verdeling

Transformaties

1.5.5 Centrale limietstelling

Centrale limietstelling

Normale benadering voor binomiale kansen

1.5.6 Kansverdelingen (multivariaat)

Discrete kansverdelingen

1. Gezamenlijke kansdichtheid
2. Gezamenlijke kansverdeling
3. Som, verschil, product, transformaties
4. Covariantie, correlatie

Continue kansverdelingen

1. Gezamenlijke kansdichtheid
2. Gezamenlijke kansverdeling
3. Som, verschil, product, transformaties
4. Covariantie, correlatie
5. De bivariaat normale verdeling